KORELACIJA PERIODIČNIH SIGNALA

U opštoj harmonijskoj analizi periodičnih signala poseban značaj ima pojam ***korelacije*** koja povezuje dva periodična signala.

Neka su signali opisani funkcijama $f_1(t)$ i $f_2(t)$ koje imaju istu periodu $T=2\pi/\omega_0$.

Fourier-ove transformacije ovih funkcija su:

$$F_{n1} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$F_{n2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_2(t)e^{-jn\omega_0 t}dt, \qquad n = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

Njihova korelacija se definiše na sledeći način:

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)f_2(t+\tau)dt, \qquad -\infty < \tau < \infty$$

τ predstavlja kontinualni pomjeraj u vremenu u intervalu od $-\infty$ do ∞, pri čemu τ ne zavisi od *t.*

Traženje korelacije dva signala podrazumijeva tri koraka:

1. Pomjeranje jedne od funkcija u vremenu za τ
2. Množenje te pomjerene funkcije drugom funkcijom iste periode
3. Izračunavanje srednje vrijednosti tog proizvoda u toku jedne periode

$$R_{12}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) f_2(t+\tau) dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n2} e^{jn\omega_0(t+\tau)}\right) dt =$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n2} e^{jn\omega_0\tau}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n1}^{*} F_{n2} e^{jn\omega_0\tau}$$

Funkcija $R_{12}(\tau)$ je periodična funkcija po τ, sa periodom $T=2\pi/\omega_0$ i njen kompleksni spektar je proizvod $F_{n1}^{*}F_{n2}$. Stoga važi:

$$F_{n1}^{*} F_{n2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{12}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

$R_{12}(\tau)$ i $F_{n1}^{*}F_{n2}$ obrazuju Fourier-ov transformacioni par. Ovaj stav se naziva ***teoremom o korelaciji*** periodičnih funkcija. Uvedena funkcija $R_{12}(\tau)$ se naziva ***korelaciona funkcija (unakrsna korelacija)***.

Posmatrajmo specijalan slučaj korelacije dva identična signala $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$.

$$R_{11}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f(t+\tau)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* F_n e^{jn\omega_0\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|F_n\right|^2 e^{jn\omega_0\tau}$$

Ovako definisana korelaciona funkcija se naziva ***autokorelaciona funkcija***.
Njena vrijednost za $\tau=0$ je:

$$R_{11}(0)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|F_n\right|^2$$

Ovo je analitički izraz za Parsevalovu teoremu.
Kako je $|F_n|^2$ snaga n-tog harmonika na jediničnom otporniku, veličina

$$S_{11}(n\omega_0)=\left|F_n\right|^2$$

se naziva ***spektar snage*** signala $f(t)$.

Shodno navedenim izrazima, dobija se:

$$R_{11}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}S_{11}(n\omega_0)e^{jn\omega_0\tau}$$

Odnosno:

$$S_{11}(n\omega_0)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}R_{11}(\tau)e^{-jn\omega_0\tau}d\tau$$

Autokorelaciona funkcija $R_{11}(\tau)$ i spektar snage $S_{11}(n\omega_0)$ funkcije *f*(*t*) čine Fourier-ov transformacioni par.

Ovaj stav se naziva ***teorema o autokorelaciji periodičnih funkcija***.

Neke osobine autokorelacione funkcije $R_{11}(\tau)$:

- Iz izraza za spektar snage $S_{11}(n\omega_0)$ vidi se da on ne zavisi od početnog faznog stava pojedinih harmonika. Pošto je $S_{11}(n\omega_0)$ istovremeno i kompleksni spektar autokorelacione funkcije $R_{11}(\tau)$, to znači da ***sve periodične funkcije koje imaju iste amplitude harmonika, a međusobno se razlikuju po početnim faznim stavovima, imaju istu autokorelacionu funkciju***.

- $R_{11}(\tau)$ je ***periodična funkcija*** čija je perioda jednaka periodi funkcije $f(t)$, tj. $T=2\pi/\omega_0$.

- $R_{11}(\tau)$ je ***parna funkcija***, što se lako dokazuje:

$$R_{11}(-\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f(t-\tau)dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}-\tau} f(x)f(x+\tau)dx=R_{11}(\tau)$$

Funkcija $R_{12}(\tau)$ nazvana je korelacionom funkcijom, a nekada se, da bi se istaklo da je riječ o dvije periodične funkcije istih perioda, za razliku od autokorelacione funkcije, ona naziva i ***unakrsnom (kroskorelacionom)*** funkcijom. Njen kompleksni spektar:

$$S_{12}(n\omega_0) = F_{n1}^* F_{n2}$$

se naziva spektrom ***unakrsne snage***.

Neke osobine kroskorelacione funkcije $R_{12}(\tau)$:

- Za kroskorelacionu funkciju bitan je redosled indeksa, tj. važi:

$$R_{12}(-\tau) = R_{21}(\tau)$$

kao i:

$$S_{21}(n\omega_0) = F_{n2}^* F_{n1} = S_{12}^*(n\omega_0)$$

- U opštem slučaju $S_{12}(n\omega_0)$ je kompleksna veličina za razliku od $S_{11}(n\omega_0)$ koja je uvijek realna veličina.

KONVOLUCIJA PERIODIČNIH SIGNALA

Ako imamo dva periodična signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$ iste periode $T=2\pi/\omega_0$, tada integral:

$$\rho_{12}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) f_2(\tau-t)\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n1}F_{n2}e^{jn\omega_0\tau}$$

predstavlja funkciju **konvolucije** signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Lako se pokazuje da važi:

$$F_{n1}F_{n2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \rho_{12}(\tau)e^{-jn\omega_0\tau}\,d\tau$$

Teorema o konvoluciji periodičnih funkcija:
Konvolucija $\rho_{12}(\tau)$ funkcija $f_1(t)$ i $f_2(t)$ i proizvod njihovih kompleksnih spektara $F_{n1}F_{n2}$ obrazuju Fourier-ov transformacioni par.

Slično korelaciji i kod konvolucije imamo tri operacije:

1. Pomjeranje funkcije $f_2(t)$ u vremenu za τ i njeno preslikavanje simetrično u odnosu na ordinatnu osu
2. Množenje tako dobijene funkcije sa periodičnom funkcijom $f_1(t)$
3. Izračunavanje srednje vrijednosti tog proizvoda u toku jedne periode

Osobine konvolucije:

- Konvolucija periodičnih funkcija je periodična funkcija čija je perioda jednaka periodi signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$, a njen kompleksni spektar je jednak proizvodu $F_{n1}F_{n2}$.

- Važi relacija:

$$\rho_{12}(\tau)=\rho_{21}(\tau)$$

HARMONIJSKA ANALIZA APERIODIČNIH SIGNALA

- Aperiodični deterministički signali mogu se opisati funkcijama koje su aperiodične u vremenskom domenu,tj. funkcijama za koje ne važi *f*(t)=*f*(t+T).
- Periodična funkcija izražena Fourier-ovim redom može se smatrati aperiodičnom ako njena perioda teži beskonačnosti. Dakle:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_0 t}\,\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\mu)e^{-jn\omega_0\mu}\,d\mu$$

Kada T$\to\infty$: $\omega_0\to d\omega$, $n\omega_0\to\omega$ i $\sum\to\int$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}\,d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\mu)e^{-j\omega\mu}\,d\mu$$

Ovaj izraz predstavlja ***Fourier-ov integral za aperiodičnu funkciju***, pri čemu je uslov za njegovu egzistenciju:

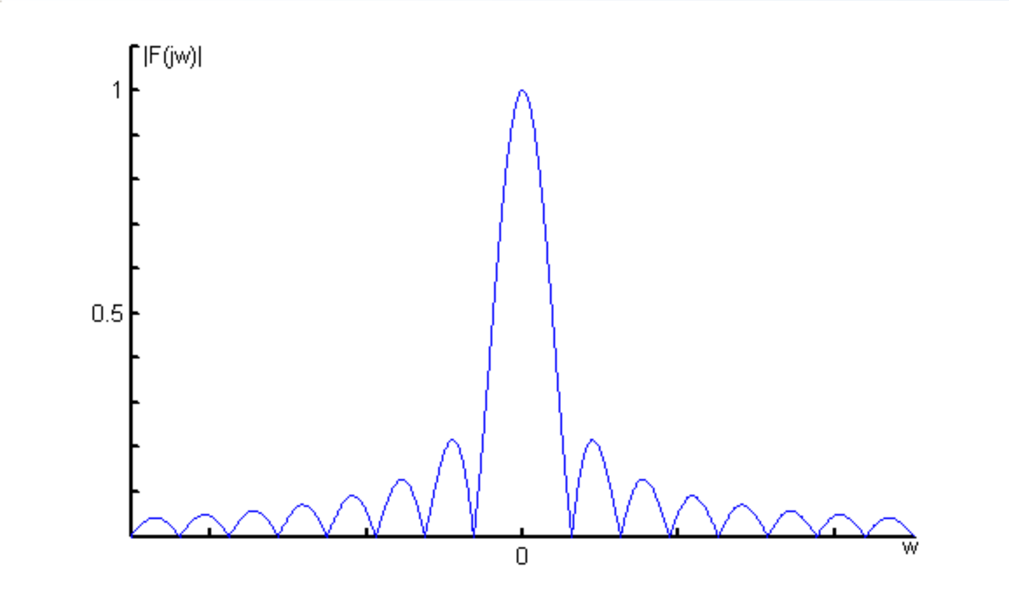
$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty \quad \text{ili} \quad \int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\,dt<\infty$$

Analogno predstavljanju periodične funkcije u obliku Fourier-ovog reda, dobija se ***Fourier-ov transformacioni par za aperiodičnu funkciju*** *f*(t)***:***

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

F(jω) je ***Fourier-ova transformacija aperiodične funkcije*** *f*(t), i ona je kontinualna funkcija učestanosti ω. Funkcija *f*(t), je ***inverzna Fourier-ova transformacija funkcije*** F(jω).



$$F(j\omega)=|F(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

|F(jω)| - spektralna gustina amplituda aperiodične funkcije *f*(t), parna funkcija

θ(ω) - spektralna gustina faza aperiodične funkcije *f*(t), neparna funkcija.

Za razliku od periodičnih funkcija, ove dvije veličine za aperiodične funkcije su ***kontinualne***.

KORELACIJA APERIODIČNIH SIGNALA

Za dvije aperiodične funkcije $f_1(t)$ i $f_2(t)$ izraz:

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t+\tau)\,dt$$

se naziva njihovom ***korelacionom funkcijom.***

Korelacija dvije aperiodične funkcije (signala) podrazumijeva tri koraka:

1. Pomjeranje jedne funkcije u vremenu za τ
2. Množenje te pomjerene funkcije drugom funkcijom
3. Izračunavanje integrala proizvoda takve dvije funkcije

Neka funkcije $f_1(t)$ i $f_2(t)$ imaju Fourier-ove transformacije $F_1(j\omega)$ i $F_2(j\omega)$. Prema definiciji, njihova korelacija je:

$$R_{12}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\,dt\int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega)e^{j\omega(t+\tau)}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega)e^{j\omega\tau}\,d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{j\omega t}\,dt$$

$$R_{12}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1^*(j\omega)F_2(j\omega)e^{j\omega\tau}\,d\omega$$

Teorema o korelaciji aperiodičnih funkcija: Korelaciona funkcija $R_{12}(\tau)$ i proizvod $F_1^*(j\omega)F_2(j\omega)$ predstavljaju Fourier-ov transformacioni par.

• Specijalni slučaj korelacije kada je $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$: ***autokorelaciona funkcija*** aperiodične funkcije $f(t)$:

$$R_{11}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega)F(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$R_{11}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau}d\omega$$

Kako je $|F(j\omega)|^2 = S_{11}(\omega)$ ***spektralna gustina energije*** aperiodične funkcije $f(t)$, to je:

$$R_{11}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$S_{11}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

Teorema o autokorelaciji aperiodičnih funkcija:

Spektralna gustina energije aperiodične funkcije $f(t)$ i autokorelaciona funkcija $R_{11}(\tau)$ obrazuju Fourier-ov transformacioni par.

Kad je τ=0:

$$R_{11}(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

$$R_{11}(0)=\left[f_{eff}(t)\right]^2$$

čime se definiše ***Parsevalova teorema za aperiodične funkcije (signale)***. Pri tome je autokorelaciona funkcija parna

$$R_{11}(\tau)=R_{11}(-\tau)$$

- Da bi se istakla razlika između autokorelacione funkcije i korelacije dvije različite funkcije, uvodi se pojam ***unakrsne korelacione funkcije***, a veličina:

$$S_{12}(\omega)=F_1^*(j\omega)F_2(j\omega)$$

se naziva ***spektralna gustina unakrsne energije***, ili ***spektar funkcije*** $R_{12}(\tau)$. Pri tome, važe relacije:

$$R_{21}(\tau)=R_{12}(-\tau)$$

$$S_{21}(\omega)=F_1(j\omega)F_2^*(j\omega)=S_{12}^*(\omega)$$

KONVOLUCIJA APERIODIČNIH SIGNALA

Izraz čiji je oblik:

$$\rho_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(\tau - t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) F_2(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

naziva se ***konvolucijom aperiodičnih funkcija*** $f_1(t)$ i $f_2(t)$ ili ***konvolucionim integralom.*** Konvolucija podrazumijeva sledeća tri koraka:

1. jedna od funkcija se pomjera u vremenu za τ i prelazi u lik simetričan u odnosu na ordinatnu osu
2. tako dobijena funkcija množi se drugom funkcijom
3. računa se integral njihovog proizvoda u neograničenom intervalu

$$\rho_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) F_2(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

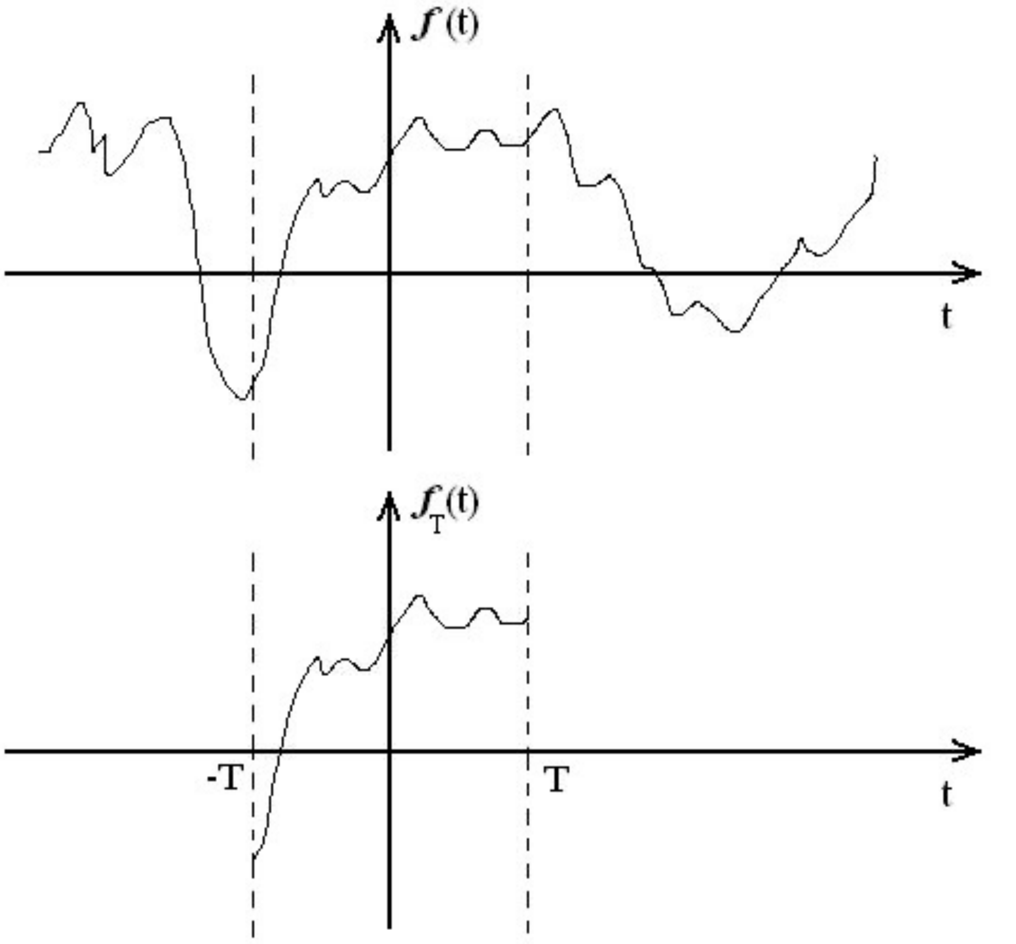
$$F_1(j\omega) F_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} dt$$

Teorema o konvoluciji aperiodičnih funkcija:

Konvolucija dvije aperiodične funkcije $\rho_{12}(\tau)$ i proizvod $F_1(j\omega)$ $F_2(j\omega)$ obrazuju Fourier-ov transformacioni par.

ANALIZA SLUČAJNIH SIGNALA

Slučajne signale nije moguće opisati preciznim analitičkim izrazom u vremenu, pa nije moguće koristiti Fourier-ovu analizu. Opisivanje ovakvih signala se vrši metodama teorije statistike.



Da bi izveli potrebne zaključke, posmatrajmo samo jedan dio koji se nalazi u intervalu (-T, T) jednog slučajnog signala:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & t < |T| \\ 0 & t > |T| \end{cases}$$

Ovako dobijena funkcija je aperiodična, ograničena, pa je njena Fourier-ova transformacija:

$$F_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F_T(j\omega) = \int_{-T}^{T} f_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

Srednja snaga slučajnog signala predstavlja jedan od parametara za njegovo opisivanje. Definiše se na sledeći način:

- Za ograničenu funkciju $f_T(t)$ snaga se definiše kao:

$$P_{srT} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T^2(t)dt$$

Kako je $f(t)=f_T(t)$ kada $T\rightarrow\infty$, to je:

$$P_{sr} = \lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T^2(t)dt = \lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{2T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_T(j\omega)F_T^*(j\omega)d\omega$$

$$P_{sr} = \lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|F_T(j\omega)\right|^2}{2T}d\omega$$

Shodno prethodnim razmatranjima, ako označimo veličinu:

$$\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{\left|F_T(j\omega)\right|^2}{2T} = S_{11}(\omega)$$

što predstavlja spektralnu gustinu srednje snage slučajnog signala $f(t)$, dobija se:

$$P_{sr} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(\omega)d\omega$$

Autokorelaciona funkcija slučajnog signala:

$$R_{T11}(\tau)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T(t)f_T(t+\tau)dt=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F_T(j\omega)\right|^2 e^{j\omega\tau}d\omega$$

Za granični slučaj kada T→∞:

$$R_{11}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T(t)f_T(t+\tau)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|F_T(j\omega)\right|^2}{2T}e^{j\omega\tau}d\omega$$

Uz uvedenu oznaku za spektralnu gustinu srednje snage slučajnog signala *f*(t), važi:

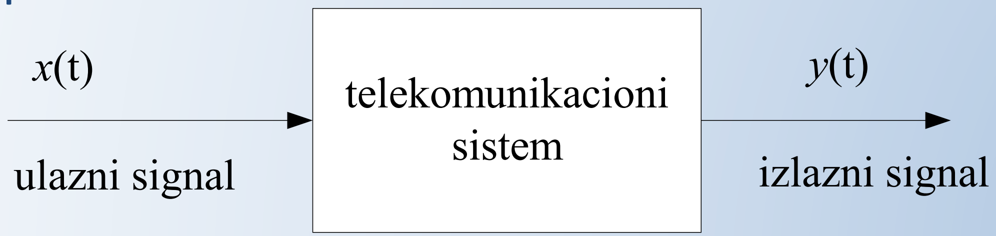
$$R_{11}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$S_{11}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

što predstavlja **Wiener-Hinchin**-ovu teoremu za slučajne signale: Autokorelaciona funkcija slučajnog signala i njena spektralna gustina srednje snage predstavljaju Fourier-ov transformacioni par.

ULOGA I ZNAČAJ HARMONIJSKE ANALIZE DETERMINISTIČKIH SIGNALA

Osnovna uloga harmonijske analize je da se vremenska funkcija, koja opisuje signal, predstavi u domenu učestanosti podesno izabranim parametrima kako bi se omogućilo analitičko praćenje prenosa signala telekomunikacionim sistemima. Na taj način se stvaraju uslovi za utvrdjivanje nivoa tačnosti u prenosu signala, odnosno kvaliteta sa kojim se odredjenim sistemom prenose informacije. Eventualne promjene u signalu tokom njegovog prenosa se utvrdjuju na osnovu uporedjivanja signala na ulazu u sistem (pobuda) sa signalom na izlazu iz sistema (odziv). Upravo primjena harmonijske analize omogućava na relativno jednostavan način ovo uporedjenje, odnosno nalaženje medjusobnog odnosa odziva i pobude sistema.



Veliki broj sklopova telekomunikacionih sistema su po svom opštem karakteru ***linearne mreže sa konstantnim parametrima***:

- ***mreže sa konstantnim parametrima* - ** mreže koje imaju osobinu da ako pobudnom signalu *x*(t) odgovara izlazni signal *y*(t), onda pobudnom signalu *x*(t+τ) odgovara izlazni signal *y*(t+τ). (Ove mreže se nazivaju i ***vremenski invarijantne mreže***).

- ***linearne mreže*** - mreže koje imaju osobinu da, ako se za pobudni signal $x_i(t)$ dobija izlazni signal $y_i(t)$, onda ulazni signal oblika:

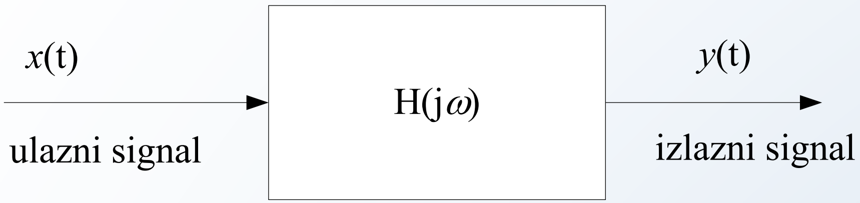
$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \ldots + a_n x_n(t)$$

dovodi do izlaznog signala oblika:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \ldots + a_n y_n(t)$$

Osnovna osobina linearnih mreža sa konstantnim parametrima je da se u njima ne generišu novi harmonici signala tokom prenosa, tj. sve promjene na prenošenom signalu se dešavaju na nivou njegovih amplituda i faza, ali ne i na nivou njegovih učestanosti.

Prenosna (transfer) funkcija linearnih mreža sa konstantnim parametrima:



$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\chi(\omega)}$$

gdje se sa:

- $|H(j\omega)|$ modeluju promjene amplitude signala
- $\chi(\omega)$ modeluju promjene faze signala

Pri tome se odziv sistema (signal na njegovom izlazu) može naći u:

1. domenu učestanosti ili
2. domenu vremena

s tim što se pri razmatranju prenosa dterminističkih signala u oba slučaja primjenjuje harmonijska analiza.

NALAŽENJE ODZIVA SISTEMA U DOMENU UČESTANOSTI

1) Ako je ulazni signal *x*(t) opisan nekom periodičnom vremenskom funkcijom složenog talasnog oblika, onda se harmonijskom analizom može predstaviti Fourier-ovim redom kao suma harmonika (prosto periodičnih funkcija-sinusoida):

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

Pošto za linearne mreže sa konstantnim parametrima važi zakon superpozicije, to se uticaj mreže na svaku sinusoidalnu komponentu može zasebno posmatrati. Drugim riječima, poznavanje funkcije prenosa H(jω), za sve odgovarajuće vrijednosti ω, omogućava da se pronađu spektralne komponente (harmonici) izlaznog signala.

$$Y_n = H(j\omega)X_n = H(jn\omega_0)X_n$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n e^{jn\omega_0 t}$$

2) Ako je ulazni signal opisan nekom aperiodičnom vremenskom funkcijom x(t), Fourier-ova transformacija ove funkcije je *X*(jω)*.* Tada se signal *x*(t) može izraziti inverznom transformacijom svog kompleksnog spektra *X*(jω):

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

Izlazni signal u domenu učestanosti , odnosno njegov kompleksni spektar, se nalazi kao:

$$Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)$$

Na osnovu prethodnog, i poznavanja prenosne funkcije sistema, analitički izraz za izlazni signal u domenu vremena se dobija kao:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

- ✓ **Zaključak**: ako je poznat odziv linearne mreže sa konstantnim parametrima čitavom skupu sinusoidalnih pobuda svih mogućih učestanosti, tada se odziv te iste mreže na bilo koji drugi pobudni signal može jednoznačno odrediti.

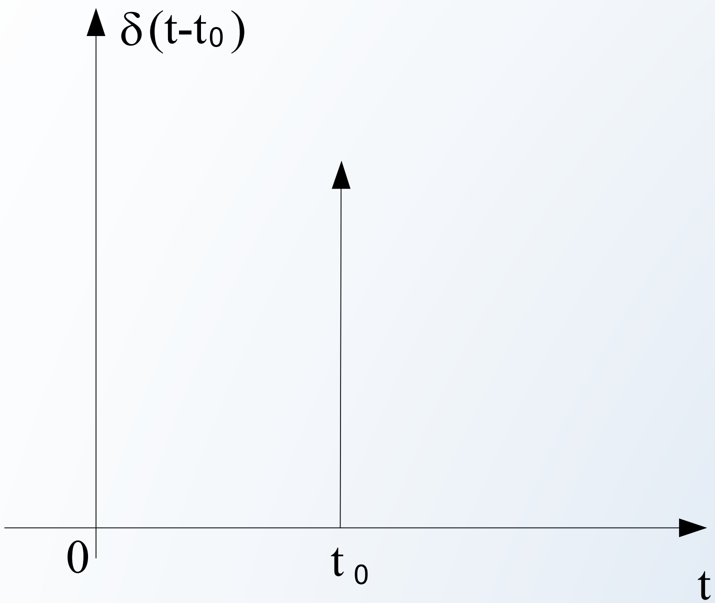
Za dvije klase determinističkih signala, periodične i aperiodične, zahvaljujući harmonijskoj analizi, proučavanje njihovog prenosa svodi se u suštini na poznavanje odziva mreže sinusoidalnoj pobudi, odnosno na poznavanje karakteristika mreže u stacionarnom režimu.

Odziv sistema u domenu učestanosti se nalazi na sledeći način:

1. **Definiše se pobuda u domenu učestanosti: X_n ili $X(j\omega)$**
2. **Odredi se proizvod funkcije prenosa sistema i spektra pobude ($H(j\omega)X_n$ ili $H(j\omega)X(j\omega)$) čime se dobija odziv u domenu učestanosti :Y_n ili $Y(j\omega)$**
3. **Inverznom Fourier-ovom transformacijom određuje se analitički oblik izlaznog signala (odziva) u domenu vremena**

NALAŽENJE ODZIVA SISTEMA U DOMENU VREMENA

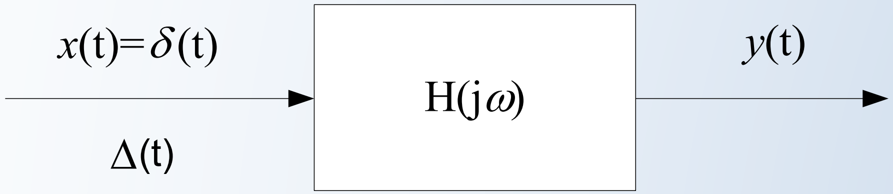
Transfer (prenosna) funkcija sistema H(jω) može da se definiše kao odziv sistema na pobudu u vidu Dirac-ovog (delta) impulsa:



$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$$

$$\Delta(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$$



$$Y(j\omega)=H(j\omega)\Delta(j\omega)=H(j\omega)$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$y(t)=h(t)$$

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$$

- ✓ **Zaključak**: odziv linearne mreže *h*(t) impulsnoj aperiodičnoj pobudi u vidu delta funkcije i funkcija prenosa mreže H(jω) obrazuju Fourier-ov transformacioni par.

  h(t) se naziva ***impulsni odziv sistema***. Ukoliko je on poznat može se naći odziv mreže *y*(t) na bilo koju pobudu *x*(t).

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\mu)e^{-j\omega\mu}d\mu d\omega$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\mu)d\mu\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega(t-\mu)}d\omega$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\mu)x(t-\mu)d\mu=\int_{-\infty}^{\infty}x(\mu)h(t-\mu)d\mu$$

Izlazni signal je ***konvolucija*** ulaznog signala i impulsnog odziva sistema!!!

OSNOVNE KARAKTERISTIKE SIGNALA KOJI PREDSTAVLJAJU REALNE PORUKE

1. SIGNAL GOVORA
- Opseg učestanosti od 300Hz do 3400 Hz usvojen je od strane CCITT-a (ITU) za standardnu širinu kanala za prenos govora.
- Opsezi (300-2400)Hz i (300-2700)Hz primjenjuju se u vezama redukovanog kvaliteta.

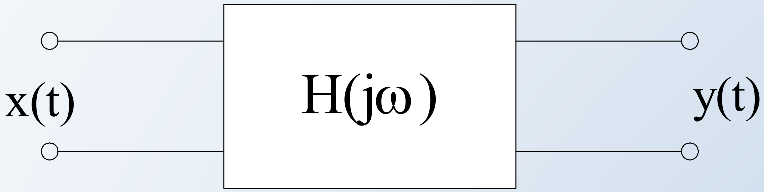
2. SIGNAL MUZIKE
-Propisana potrebna širina opsega za prenos muzičkog signala je 30-15000Hz.
-Postoje sistemi čija je širina opsega 50Hz-10 000Hz, ali je u njima kvalitet prenosa nešto lošiji.

3. SIGNALI PODATAKA I TELEGRAFSKI SIGNALI
-Spektar je povezan sa brzinom signaliziranja

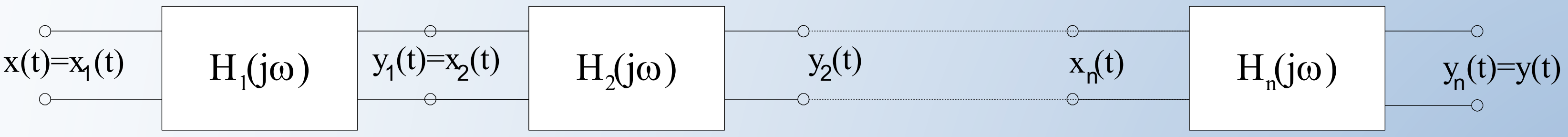
4. TELEVIZIJSKI SIGNAL (SIGNAL POKRETNE SLIKE)
- Opseg koji zauzima video signal je od 10Hz do 5MHz

PRENOS SIGNALA KROZ LINEARNE SISTEME

Telekomunikacioni sistemi su sastavljeni od sklopova od kojih svaki pojedinačno predstavlja zasebnu funkcionalnu cjelinu.
Za svaki sklop mogu se odrediti dva kraja koja predstavljaju ulaz i dva kraja koja predstavljaju izlaz iz sklopa. Dakle, svaki sklop se može smatrati četvorokrajnikom, odnosno četvoropolom.



Niz ovakvih sklopova, čije su funkcije različite, a koji su vezani kaskadno, obrazuju ***sistem za prenos***:



Saglasno tome, kompletan sistem za prenos može da se ekvivalentira jednim četvoropolom.

Takav četvoropol, koji predstavlja sistem za prenos, karakteriše funkcija prenosa H(jω). Pri tome:

- Funkcija prenosa matematički modeluje promjene (amplitude i faze) koje nastaju pri prenosu signala kroz sistem.
- Linearna kola ***ne izazivaju*** promjene učestanosti.

Ako je signal na ulazu četvoropola *x*(t) i njegova Fourier-ova transformacija X(jω), onda je Fourier-ova transformacija signala *y*(t) na izlazu četvoropola:

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

Kako je funkcija prenosa kompleksna veličina, može se napisati u obliku:

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\chi(\omega)}$$

A(ω) modeluje promjene amplitude ulaznog signala

χ(ω)modeluje promjene faze ulaznog signala

Ako ulazni i izlazni signal predstavimo u domenu učestanosti:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\theta_x(\omega)}$$

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)|e^{j\theta_y(\omega)}$$

dobija se:

$$|Y(j\omega)| = A(\omega)|X(j\omega)|$$

$$\theta_y(\omega) = \theta_x(\omega) + \chi(\omega)$$

Dakle, očigledno je da se modulom A(ω) funkcije prenosa opisuju modifikacije ***spektralne gustine amplituda*** prenošenog signala, dok se argumentom χ(ω) funkcije prenosa opisuju promjene na nivou ***faznih stavova*** pojedinih komponenti prenošenog signala. Stoga se A(ω) naziva ***amplitudska***, a χ(ω) ***fazna karakteristika*** linearnog sistema.

Za kaskadnu vezu više četvoropola, funkcija prenosa cijelog sistema se odredjuje kao:

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)\cdot\ldots\cdot H_n(j\omega) = \prod_{i=1}^{n} H_i(j\omega)$$

$$A(\omega) = A_1(\omega)A_2(\omega)\cdot\ldots\cdot A_n(\omega) = \prod_{i=1}^{n} A_i(\omega)$$

$$\chi(\omega) = \chi_1(\omega) + \chi_2(\omega) + \ldots + \chi_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \chi_i(\omega)$$

- Amplitudska karakteristika A(ω) cijelog sistema jednaka je ***proizvodu*** amplitudskih karakteristika pojedinih elemenata (sklopova)
- Fazna karakteristika χ(ω) cijelog sistema jednaka ***sumi*** faznih karakteristika pojedinih elemenata (sklopova)

IDEALNI SISTEMI PRENOSA

Idealni sistem prenosa – sistem u kome je izlazni signal $y(\mathrm{t})$ identičan ulaznom signalu $x(\mathrm{t})$.

Generalno, pod idealnim sistemom podrazumijeva se onaj sistem čiji je odziv oblika:

$$y(\mathrm{t})=\mathrm{A}x(\mathrm{t}-\mathrm{t}_0)$$

Riječ je o sistemu koji unosi ***konstantno*** kašnjenje i modifikuje amplitudu u nekom ***konstantnom*** iznosu. Na taj način se postiže da signal koji se prenosi ne bude izložen deformacijama koje bi dovele do toga da signal na izlazu takvog sistema (sklopa) ne bude identičan ulaznom signalu.

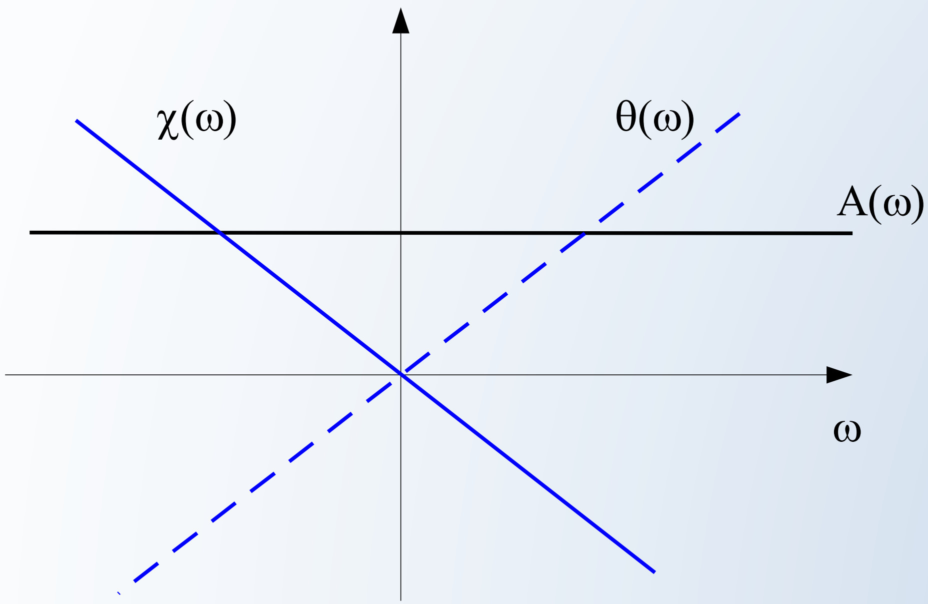
Polazeći od $y(t)=Ax(t-t_0)$, dobija se funkcija prenosa $H(j\omega)$ idealnog sistema za prenos:

$$Y(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} Ax(t-t_0)e^{-j\omega t}dt=A\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega(t_0+\tau)}d\tau$$

$$Y(j\omega)=Ae^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$Y(j\omega)=Ae^{-j\omega t_0}X(j\omega) \quad \Rightarrow \quad H(j\omega)=Ae^{-j\omega t_0}=A(\omega)e^{j\chi(\omega)}=A(\omega)e^{-j\theta(\omega)}$$

$\theta(\omega)= -\chi(\omega)$ predstavlja karakteristiku ***faznog kašnjenja***.



Prenos će biti idealan kroz linearni sistem koji ima amplitudsku karakteristiku koja ne zavisi od učestanosti:

$$A(\omega)=A=\text{const.}$$

i faznu karakteristiku koja je linearna funkcija učestanosti:

$$\chi(\omega)= -\omega t_0$$

Navedeni uslov za idealan sistem prenosa može da se dodatno proširi, tako da se idealnim smatra sistem čija je funkcija prenosa oblika:

$$H(j\omega) = Ae^{-j(\omega t_0 \pm n\pi)}, \quad \text{n} - \text{cio broj}$$

$$|H(j\omega)| = A = const.$$

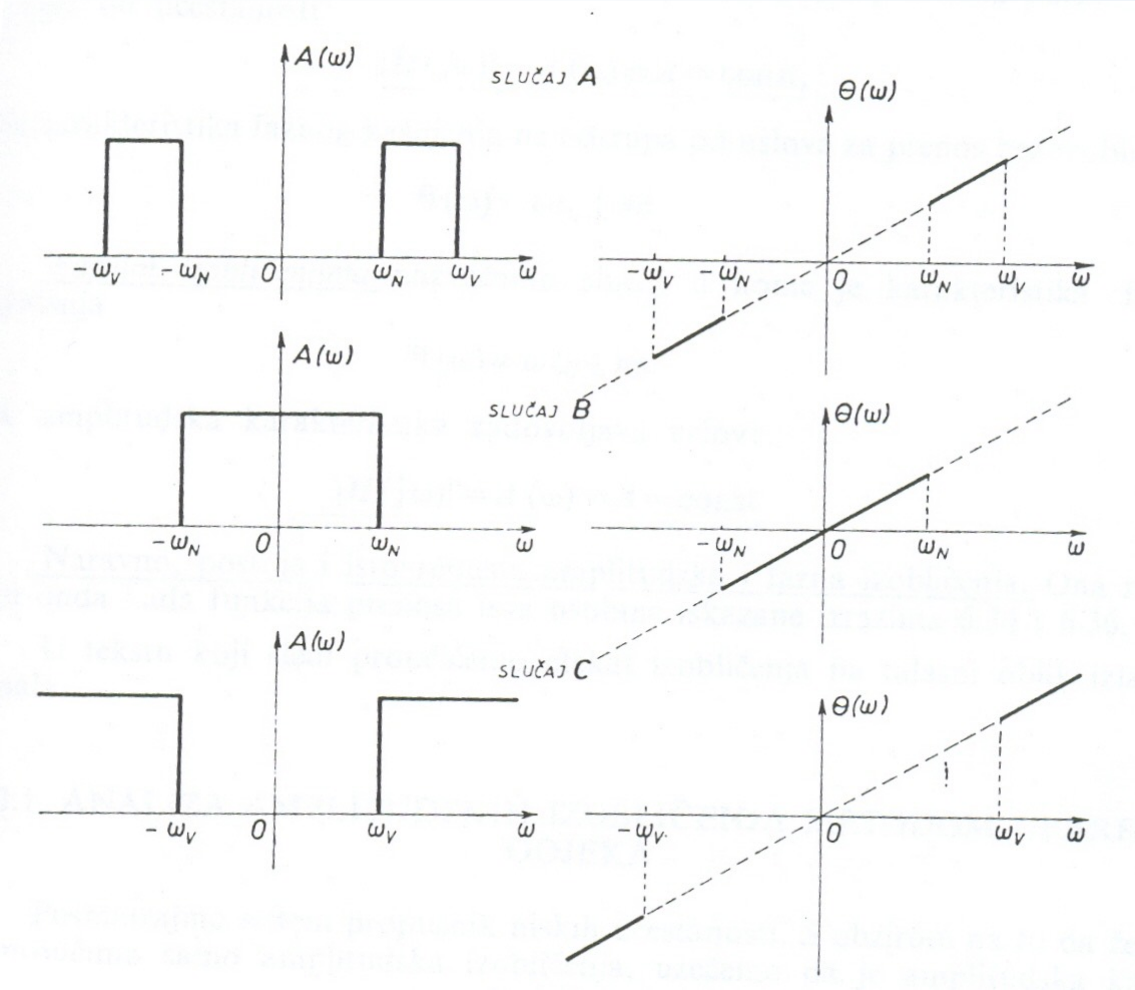
$$\theta(\omega) = \omega t_0 \pm n\pi$$

Pri tome, za A>1 sistem unosi ***pojačanje***, a za A<1 ***slabljenje***.

- Pri traženju uslova za idealan prenos nismo postavili nikakva ograničenja u pogledu širine spektra prenošenog signala *x*(t). U tom slučaju, za prenos signala bez izobličenja, izvedeni uslovi moraju biti zadovoljeni u ***cijelom opsegu učestanosti*** ($-\infty<\omega<\infty$).
- Medjutim, sistemi za prenos se realizuju kao sistemi ***ograničenog opsega*** učestanosti, tako da se govori o ***propusnom opsegu*** sistema za prenos ili ***širini kanala***.
- U takvim uslovima cijeli sistem se ponaša kao ***filtar***, tj. komponente signala određenih učestanosti koje se nalaze u njegovom propusnom opsegu propušta sa malim slabljenjem (ili ih u nekim slučajevima i pojačava), dok za ostale komponente van njegovog propusnog opsega unosi veliko slabljenje.

Idealan sistem za prenos u propusnom opsegu ima karakteristike idealnog sistema, dok sve komponente ulaznog signala van tog opsega beskonačno slabi. Sisteme za prenos dijelimo u tri grupe:

1. propusnike opsega učestanosti (opseg je od ω_N do ω_V)
2. propusnike niskih učestanosti (opseg je od $\omega_N=0$ do ω_V)
3. propusnike visokih učestanosti (opseg je od ω_N do $\omega_V \to \infty$)



Slika: Amplitudska karakteristika i karakteristika faznog kašnjenja idealnog sistema za prenos:
A - propusnik opsega;
B - propusnik niskih učestanosti; C - propusnik visokih učestanosti

Funkcija prenosa idealnog sistema za prenos (filtra) je:

$$H(j\omega)=\begin{cases} Ae^{-j(\omega t_0 \pm n\pi)} & \text{u propusnom opsegu} \\ 0 & \text{van propusnog opsega} \end{cases}$$

Prelaz sa propusnog na nepropusni opseg treba da bude ***trenutan*** (amplitudska karakteristika sa A na 0), što dovodi do problema u praktičnoj realizaciji ovakvog sistema.

✓ **Zaključak:**

Linearni sistemi koji bi imali idealnu funkciju prenosa (kao na slikama) ***ne mogu se fizički realizovati***:

- Ne mogu se postići ***istovremeno oba uslova za idealan prenos***, pa se zbog toga javljaju izvjesna ***izobličenja*** signala.
- Iako se mogu samo teorijski analizirati, idealni sistemi prenosa imaju značaj za analizu realnih sistema. Ako se napravi sistem čija amplitudska karakteristika približno zadovoljava uslov idealnog prenosa, dodavanjem određenog sklopa može se korigovati fazna karakteristika da ukupno fazno kašnjenje sistema zadovolji uslov za prenos bez izobličenja (važi i obrnuto).